Wiebke Bedenknecht, Karl Heuer und Deniz Sarikaya
(Universität Hamburg)

Parkettierungen der Ebene mit Anschlussproblemen
Förderung mathematisch begabter Jugendlicher innerhalb des Klassenverbandes am Beispiel einer Projektwoche

1 Vorwort

Diese Arbeit versteht sich als Ideengeber und Leitfaden für Lehrkräfte in der Praxis. Wir werden das Aufgabenfeld der Parkettierungen vorstellen. Es geht darum ein Gebilde durch regelmäßige Fliesen (oder Kacheln) füllend auszulegen. Dieses Aufgabenfeld bietet sowohl eine mathematisch tiefergehende und anspruchsvolle Dimension, ohne über Elementarmathematik hinauszugeben, als auch die Möglichkeit sich in andere Richtungen (Kunst, Kultur, …) zu vertiefen. Damit möchten wir es ermöglichen mathematisch begabte Schüler_Innen im Klassenverband zu fördern und gleichzeitig interessante Anregungen für alle Schüler_Innen in der Klasse liefern.

Die Arbeit beinhaltet einander motivierende, aber prinzipiell unabhängig voneinander bearbeitbare Aufgabenzettel. Wir haben unsere Aufgabenzettel so dargestellt, dass wir Stoff für eine Projektwoche liefern. Ferner machen wir einige Vorschläge für Exkurse und geben Lösungshinweise für Sie als Lehrkraft. Der Kürze wegen verzichten wir auf einen allzu großen theoretischen Überbau.

Zuvor möchten wir jedoch einige allgemeine Gedanken zur Arbeit in offenen Problemfeldern vermitteln und darüber sprechen, wie Sie selbst analoge Aufgabenblätter konzipieren können.

Zum Schluss bieten wir einen Ausblick auf mögliche weitere Fragestellungen, insbesondere auf solche, die noch Teil aktueller Forschung sind und dennoch bereits für die Schüler_Innen verständlich sowie aus den vorher bearbeiteten Aufgabenzetteln ersichtlich sind. Es mag verwundern oder zu ambitioniert erscheinen auf aktuelle Forschungsthemen Bezug zu nehmen, doch allzu oft ist dies ohne großen zusätzlichen Aufwand möglich. Vielen Problemen wird nicht umsonst eine besondere Schönheit zugesprochen, aufgrund der Möglichkeit sie einfach und nahezu allgemeinverständlich zu formulieren. Die in dieser Arbeit behandelte Parkettierungsproblematik bildet dafür ein geeignetes Beispiel. Wie schnell man mit dieser Thematik am Rande der Forschung angelangt ist, zeigt die noch offene Frage danach, mit welchen konvexen Fünfecken sich die Ebene parkettieren lässt, wobei je nur ein Typ von Fünfeck zur Parkettierung verwendet werden darf. Momentan sind 15 verschiedene Arten von Fünfecken bekannt, wovon die letzte erst jüngst im Jahr 2015 entdeckt wurde.[1] Obwohl diese konkrete Frage offenkundig nicht einfach ist, können und sollten gegebenenfalls auch Mathematikbegeisterte außerhalb der Akademia an ihrer Beantwortung teilhaben, wie beispielsweise durch Marjorie Rice in diesem Zusammenhang eindrucksvoll untermauert. Zwischen 1975 und 1976 entdeckte diese Hobbymathematikerin vier bis dahin unbekannte Parkettierungen mit Fünfecken in diesem Kontext.[2] An geeigneter Stelle sollte man also nicht bloß ermutigt sein den thematischen Schritt in Richtung Forschungsthemen zu gehen, es mag sogar fahrlässig sein ihn nicht zu gehen.

Ob unser Format für Sie zielführend ist, hängt natürlich von vielen Gegebenheiten an Ihrer Schule ab. Grundsätzlich gibt es viele Möglichkeiten mathematisch begabte Jugendliche zu fördern, darunter:

1. Enrichment: Innere Differenzierung, Plusangebote.
2. Akzeleration: Überspringen einer Klassenstufe oder auch die Teilnahme am Unterricht eines Faches in einer höheren Klassenstufe.
3. Separation: Bildung homogener Gruppierungen, besondere hochbegabten Schulen, Springerklassen, aber auch die Teilnahme an besonderen Schülerakademien oder Wettbewerben.

Im Appendix haben wir eine grobe Übersicht zu Fördermöglichkeiten beigefügt. Wir möchten Sie nachdrücklich dazu motivieren begabte Schüler_Innen auf die möglichen Förderungen hinzuweisen.

2 Arbeit in offenen Problemfeldern: Eine Handreichung für Lehrkraft und Schüler_Innen

Zunächst stellt sich die Frage, was wir mit einem offenen Problemfeld meinen. Wir versuchen keine Definition zu geben. Offen heißt nicht ohne Regeln. Wichtig ist, dass die Schüler_Innen auf Entdeckungssuche gehen können, sich eigene Folgeprobleme überlegen, über Lösungen reflektieren, aber auch – und dies ist besonders wichtig, wenn wir mathematisch begabte Schüler_Innen im Klassenverband fördern wollen – entsprechend ihrer Begabungen und Interessen Exkurse vornehmen können, die entweder tiefer mathematisch sind oder aber in die Gesellschaft/Kunst oder Kultur gehen. Neben der Vermittlung von mathematischen Inhalten und Methoden, wollen wir:

1. Die Frustrationstoleranz der Schüler_Innen erhöhen beziehungsweise das andauernde selbstmotivierte Lernen bestärken.
2. Kompetenzen zur Kommunikation mathematischer Inhalte stärken.
3. (Optional) Studienplaninhalte aufarbeiten.

---

[1] (Mann et al. unpublished)
[2] Siehe: (Schattschneider 1978, Rice 2003)

4. Exkurse in Wissenschaft, Kunst, Kultur und Alltag aufzeigen.
5. (Optional) einen konkreten Output anstreben. Möglichkeiten sind: Jugend-forscht-Arbeit, Ausstellung von gebauten Modellen und vieles mehr.

Die Arbeit mit mathematisch begabten Jugendlichen kann auch für eine erfahrene Lehrkraft abschreckend wirken. Gerade mathematische Begabung ist mit dem Nimbus des uneinholbaren Überfliegers assoziiert.[3] Auch ein Begabter muss zunächst lernen und kann nicht ad-hoc Wissen erschaffen. Hier kommt das Arbeiten in offenen Aufgabenfeldern der Lehrkraft sogar entgegen. Zum einen ist der kommunikative Gesichtspunkt entscheidend. Es geht nicht nur darum, die richtige Antwort zu kennen, sondern diese auch an die Klassenkameraden kommunizieren zu können. Die Aufforderung dies verständlich zu tun, gibt der Lehrkraft Zeit die Beiträge selbst zu verstehen und einzuordnen. Ferner kann und sollte in einer offenen Fragestellung klar sein, dass wir Wege gehen, die zuvor vielleicht noch niemand gegangen ist (wir werden später sehen, wie schnell wir zu Fragen aktueller Forschung gelangen). Dies dreht das klassische Lehrerverständnis um. Sie werden zum Begleiter.

Für die Kinder ist die Situation ebenfalls neu. Wir empfehlen Ihnen auch den Schüler_Innen eine kleine Anleitung zu geben. Wichtige Punkte, die kommuniziert werden könnten, sind:

1. Der Weg ist das Ziel: Es ist normal etwas nicht sofort zu wissen oder gegebenenfalls gar nicht zu finden.
2. Versucht erst einmal Beispiele zu finden.
3. Arbeitet gerne in Gruppen (nicht verpflichtend).
4. Versucht es möglichst lange selbst, fragt dann erst das Internet.
5. Schreibt auf, was ihr denkt! Dann könnt ihr wieder darauf zugreifen.
6. Stellt eure Ergebnisse verständlich vor.

Auch wenn es für Lehrkräfte, die im Hauptamt Wissen und Methoden direkt vermitteln, teilweise sehr schwer ist: Bei der Bearbeitung von offenen Aufgaben sollten Sie die Schüler_Innen nur begleiten. Ziel ist es immer, dass die Schüler_Innen möglichst eigenständig Resultate finden, sich selber Fragestellungen heraussuchen. Nach Möglichkeit sollte nur minimal eingegriffen werden.

---

[3] Es gibt durchaus Geschichten wie die des jungen Terence Taos, der mit 12 Jahren eine Goldmedaille bei der Internationalen Mathematik Olympiade gewann oder von Harvey Friedman, der mit 18 Assistenzprofessor in Stanford geworden ist. Diese stellen aber wirkliche Ausnahmen dar.

3 Wie entwerfe ich neue Aufgabenblätter?

3.1 Allgemeine Gedanken

Die hiesigen Aufgaben können als Beispiel für eine Projektwoche dienen. Ferner gibt es einen weitreichenden Fundus von interessanten Aufgaben und Literatur zur Förderung mathematisch begabter Jugendlicher. Mittelfristig möchten wir jedoch dazu ermutigen, dass Sie als Lehrkraft auch eigene Aufgabenblätter konzipieren; nicht zuletzt, da dies Ihnen die Möglichkeit bietet Ihre privaten Interessen in den Unterricht einzubringen. Wenn Sie sich für ein Thema begeistern können, fällt es Ihnen auch viel leichter Ihre Schüler_Innen zu begeistern. Wie wir im Fall von Frau Rice gesehen haben, gibt es durchaus mathematische Entdeckungen außerhalb der Forschungseinrichtungen und wir möchten Sie ermutigen sich selber aktiv als Forscher zu betätigen, auch um dieses Erlebnis besser an Ihre Schüler_Innen weiterzugeben.

In dieser Sektion möchten wir Ihnen zunächst mögliche Anfangspunkte und Quellen für Aufgaben auflisten. Anschließend beschäftigen wir uns mit der Suche nach Folgeproblemen.

Die Suche nach Anschlussproblemen ist eine schwierige Angelegenheit. Wie wir sehen werden, passiert es schnell, dass man auch in elementaren Aufgabenfelder auf Fragen der aktuellen Forschung stoßen kann. Dies ist nicht immer abzusehen. Ein prominentes Beispiel ist *Fermats letzter Satz.* Sie kennen den Satz des Pythagoras. Eine naheliegende Folgefrage ist, ob es ganzzahlige Lösungen für andere Potenzen gibt, also ob es ganzzahlige Lösungen für die Gleichung

$$a^m+b^m = c^m$$

mit $m \geq 3$ gibt.[4] Diese Frage ist eine der wohl berühmtesten Fragen der Mathematik, dessen Lösung die Mathematikergemeinde über 300 Jahre beschäftigte. Wir stellen insbesondere einige Fragen vor, die noch Stand aktueller Forschung sind. Dies soll nicht entmutigen, ganz im Gegenteil: Es legitimiert, wenn Schüler_Innen keine Lösung finden, aber auch, wenn Sie als Lehrkraft keine Antwort geben können.

Für das Konzipieren eines neuen Aufgabenblattes kann es dienlich sein eine Aufgabe aus einem Schülerwettbewerb als Vorbild zu nehmen.[5] Das Problem

[4] Für eine populärwissenschaftliche Einführung konsultiere man beispielsweise (Ribenboim 2005, c1999), (Singh 2015) oder (Nestke 2009). Der auch für Mathematiker nur mit erheblichen Aufwand verständliche Beweis von Wiles und Taylor findet sich in (Wiles 1995) und (Taylor and Wiles 1995).

[5] Die Mathematikolympiaden, der Internationale Städtewettbewerb Mathematik und die Schülerzirkel Mathematik bieten jeweils ein Archiv alter Aufgaben. Diese finden sich über die folgenden URLs:

sollte möglichst elementar sein (keine höhere Mathematik). Nun beginnt die Genese, die später auch die Schüler_Innen durchleben sollen. Versuchen Sie zunächst selbst das Problem zu lösen. Dies kann und soll – wenn möglich – auf mehr als eine Art geschehen. Anschließend sollten Folgeprobleme sowie Verallgemeinerungen aufgestellt und untersucht werden. Schließlich kann das Internet zur Hilfe gezogen werden; einerseits um Lösungen zu finden, andererseits um gut bearbeitbare Anschlussprobleme zu identifizieren. Falls Sie sich hierbei von dem Ursprungsproblem entfernen, ist dies kein Problem. Das eigenständige Verallgemeinern ist eine Königsdisziplin der mathematischen Forschung.

3.2 Beispielüberlegungen: Parkettierung der Ebene und vieles mehr

Betrachten wir zunächst unsere Ursprungsfrage. In dieser geht es darum die Ebene lückenlos und ohne Überlappung mit Figuren auszulegen. Eine solche Auslegung bezeichnen wir als *Parkettierung*. Die einfachste Figur ist wohl ein regelmäßiges *n*-Eck. Wir fragen also in erster Instanz:

(P_1) Mit welchem regelmäßigen *n*-Eck lässt sich die Ebene parkettieren?

Es wird nach einem Typ von *n*-Eck gefragt. Im Anschluss lassen wir mehrere Arten zu. Unsere Frage wird also zu:

(P_2) Mit welchen regelmäßigen *n*-Ecken lässt sich die Ebene parkettieren?

Diese Verallgemeinerung lässt sich als Kandidat allein an der grammatikalischen Form der Frage festmachen. Dies wird natürlich durch rein assoziative Verbindungen ergänzt werden müssen. Alternativ können wir *Bedingungen wegfallen lassen*. Dies sind in einem strengen Sinne Verallgemeinerungen: Je weniger Voraussetzungen wir haben, umso größer ist der Gültigkeitsbereich unserer Aussage. Dies führt uns zu Eschers Symmetriezeichnungen:

(P_3) Mit welchen ~~regelmäßigen~~ *n*-Ecken lässt sich die Ebene parkettieren?

(P_4) Mit welchen Figuren lässt sich die Ebene parkettieren?

Alternativ können wir auch das auszulegende Gebiet ändern. Dann erhalten wir Fragen der Form:

(P_n) Mit welchen … lässt sich ein vorgegebenes Rechteck parkettieren?

(P_{n+1}) Mit welchen … lässt sich ein Kreis parkettieren?

(P_{n+2}) Mit welchen … lässt sich der Raum „parkettieren“?

Bei P_n konnten wir alle Varianten von P_1 bis P_4 einsetzen. Dies gilt prinzipiell auch für P_{n+1}, wobei wir schnell sehen werden, dass es, aufgrund der Krümmung der Kreisscheibe, keine Parkettierung mit *n*-Ecken gibt. P_{n+2} zeigt mit der *Veränderung der Dimension* eine klassische Verallgemeinerungsrichtung. Allerdings ist nicht ganz klar, was das mehrdimensionale Analogon zur Parkettie-

---

- http://www.mathematik-olympiaden.de/archiv.html
- http://bildungsserver.hamburg.de/00-schuelerzirkel-mathe/3873098/01-schuelerzirkel-mathe
- http://www.math.uni-hamburg.de/stw/problems.html

rung sein soll. Ohne den Begriff der Parkettierung anzupassen scheint bei P_{n+2} ein kategorialer Fehler vorzuliegen, da wir mit etwas Zweidimensionalem den dreidimensionalen Raum lückenlos füllen wollen.[6] Wir könnten hingegen fragen, welche dreidimensionalen Figuren von *n*-Ecken begrenzt werden. Dies bringt uns auf die Fragen:

(P_m) Welche platonischen Körper gibt es? Dies sind Körper, die von regelmäßigen *n*-Ecken einer Sorte begrenzt werden.

(P_{m+1}) Welche archimedischen Körper gibt es? Dies sind Körper, die von regelmäßigen *n*-Ecken verschiedener Sorte begrenzt werden.

Diese Körper bilden nun aber auch Bausteine, mit denen wir den Raum lückenlos ausfüllen können. Wir können also P_{n+2} im folgenden Sinne präzisieren:

(P_{m+2}) Mit welchen archimedischen Körpern lässt sich der Raum lückenlos ausfüllen?

(P_{m+3}) Mit welchen Körpern lässt sich der Raum lückenlos ausfüllen?

Ausgehend von P_{n+1} und P_{m+3} ergibt sich die Fragestellung: Wie gut kann man mit Kugeln den Raum ausfüllen? Dies wird offensichtlich nicht lückenlos gehen, führt aber zu einer Fragestellung der aktuellen Forschung (siehe hierzu mehr in Kapitel 6).

4 Vorschläge für Aufgabenblätter: Mathematik und das Parkett

Die Arbeit beinhaltet einander motivierende, aber prinzipiell unabhängig voneinander bearbeitbare Aufgabenzettel. Wir haben unsere Aufgabenzettel so dargestellt, dass wir Stoff für eine Projektwoche liefern. Konkret haben wir vier Arbeitsplätze konzipiert, mit den Themen:

1. Parkettierung der Ebene mit regelmäßigen *n*-Ecken
2. Escher Parkette, inklusive Exkurse in die Kunst
3. Platonische und archimedische Körper, inklusive einer Bastelarbeit
4. Aperiodische Parkettierungen

Für jedes dieser Felder liefern wir ein Aufgabenblatt, welches Sie direkt an Ihre Schüler_Innen geben könnten.

[6] Aus Gründen der Vollständigkeit sei darauf verwiesen, dass es durchaus raumfüllende Kurven (Hilbert-Kurve, Peano-Kurve, Sierpiński-Kurve) gibt. Wir können also - in einem gewissen Sinne - etwas Höherdimensionales mit etwas Niedrigdimensionalem ausfüllen.

Tag 1: Das grundlegende Problem der Parkettierung

Aus dem alltäglichen Leben kennt ihr das Parkett als Fußbodenbelag, bei dem man gleichartige Holzplatten als Fliesen benutzt, um den kompletten Boden lückenlos und ohne Überlappung der Fliesen zu überdecken. Dies nennen wir eine *Parkettierung* des Bodens. Eine einfache Parkettierung wäre zum Beispiel in Abbildung 1 angegeben.

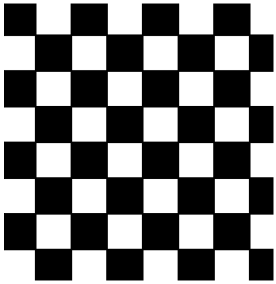

Abbildung 1: Schachbrettparkettierung

Nun wollen wir uns dieses Problems aus mathematischer Sicht annehmen. Zunächst wollen wir uns das Problem etwas vereinfachen und stellen uns einen Boden ohne Beschränkung von Wänden vor, also als eine Ebene im mathematischen Sinne. Außerdem interessieren wir uns nur für Parkettierungen mit regelmäßigen *n*-Ecken. Dies sind *n*-Ecke, bei denen alle Innenwinkel und Seitenlängen jeweils gleich groß sind. Dementsprechend ist die Frage, die wir uns stellen:

Problem 1

Mit welchen regelmäßigen *n*-Ecken kann man die Ebene parkettieren? Hier ist gemeint, dass man immer wieder das gleiche regelmäßige *n*-Eck verwendet, also stets nur Quadrate gleicher Größe oder stets nur gleichseitige Dreiecke gleicher Größe und so weiter.

Problem 2

Wie sieht es aus, wenn verschiedene regelmäßige *n*-Ecke genutzt werden dürfen? Du kannst also beispielsweise sowohl Quadrate als auch regelmäßige Achtecke nutzen. Wie viele *n*-Ecke können sich in einem Punkt treffen? Wie viele *n*-Ecke können eine gemeinsame Ecke haben?

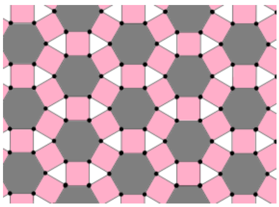

Abbildung 2: Parkettierung mit Quadraten, Drei- und Sechsecken

Nun zurück zu unser Anfangsproblematik: Das Parkettieren eines Zimmerfußbodens, den wir als quadratisch annehmen.

Problem 3

Was ändert sich, wenn du nicht mehr die Ebene, sondern ein *m* x *m* Quadrat parkettieren sollst?

Tag 2: Exkurse in Kunst und Kultur

Heute wollen wir uns damit beschäftigen, wie wir Parkettierungen verwenden können, um künstlerische Muster zu entwerfen. Eine Person, die wir an dieser Stelle besonders erwähnen möchten, ist der Künstler M. C. Escher. Wir betrachten eine stark vereinfachte Kachel aus seiner „Symmetriezeichnung 105“ genauer an (siehe Abbildung 3). Die Zeichnung findet ihr im Internet. Escher hat es dort geschafft Fliesen in Form von geflügelten Pferden zu verwenden, um damit die Ebene zu parkettieren. Die erste Frage hierbei ist nun natürlich:

Problem 1

Wie hat es Escher beim Anfertigen seiner Symmetriezeichnung 105 wohl geschafft, dass seine Pferdemotive lückenlos ineinandergreifen?

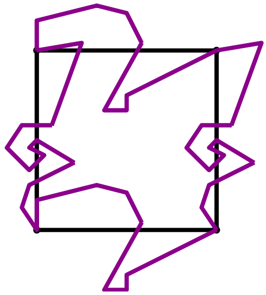

Abbildung 3: Pegasus

Problem 2

Escher hat noch weitere Symmetriezeichnungen angefertigt. Sieh dir noch andere dieser Zeichnungen an und überlege, ob das Vorgehen stets gleich ist.

Problem 3

Werde kreativ und entwerfe nun eigene solcher Muster! Diese dürfen durchaus komplizierter werden. Versuche insbesondere andere Parkettierungen zu verwenden, die nicht ausschließlich auf regelmäßigen *n*-Ecken basieren.

Escher war nicht der erste Künstler, der sich mit Parkettierungen befasst oder sie verwendet hat. Es finden sich viele Beispiele, die lange vor seinen Werken entstanden sind und auch ganze Kulturkreise, in denen derartige Kunstwerke besonders häufig zu finden sind.

Problem 4

Mache dich auf die Suche nach künstlerischen Werken aus der Vergangenheit, in denen sich Parkettierungen wiederfinden und stelle die Ergebnisse deiner Recherche vor.

Tag 3: Raumfüllungen und platonische Körper

Heute wollen wir eine in der Mathematik sehr häufig vorkommende Verallgemeinerung betrachten: Wir verändern die Dimension. Was könnte nun eine „Parkettierung” für den Raum sein? Zweidimensionale Fliesen (also Fliesen ohne Höhe) können den Raum nicht ausfüllen. Wir können aber dreidimensionale Körper durch zweidimensionale Flächen begrenzen, genauso wie (eindimensionale) Linien unsere zweidimensionalen Fliesen begrenzt haben. Ein *Polyeder* ist ein Teil des dreidimensionalen Raumes, der von n-Ecken begrenzt wird. Wir nennen einen Polyeder *konvex*, wenn die Verbindungsstrecke zweier Punkte aus dem Inneren des Polyeders ebenfalls im Inneren liegt. Ein konvexer Polyeder, der aus lauter kongruenten, regelmäßigen n-Ecken zusammengesetzt ist, von denen an jeder Ecke genau gleich viele aneinander liegen, heißt *platonischer Körper*. Nachdem wir uns am ersten Tag Parkettierungen mit genau einer Art von Fliese angesehen hatten, haben wir auch weiterführend Parkettierungen mit mehreren Fliesenarten betrachtet. An dieser Stelle wollen wir nun analog vorgehen. Wir betrachten *archimedische Körper*. Dies sind konvexe Polyeder, die wie auch die platonischen lediglich durch regelmäßige n-Ecke begrenzt werden. Diese müssen nicht alle identisch sein, wir fordern aber weiterhin, dass die Polyederecken kongruent sind, das heißt immer die gleichen Arten von n-Ecken in der gleichen Reihenfolge aneinander liegen.

Problem 1

Welche platonischen und archimedischen Körper kannst du finden? Um auf Ideen zu kommen, kann es nützlich sein zu basteln.

Die Konstruktion von Polyedern ist ein weites Feld, in welchem du noch viele Entdeckungen machen kannst. Daher fragen wir:

Problem 2

Welche Polyeder findest du, wenn du einige Bedingungen weglässt? Findest du Polyeder, die von einer Art regelmäßigem n-Eck begrenzt werden, aber nicht konvex sind? Was passiert, wenn du auch unregelmäßige n-Ecke zulässt oder die Ecken nicht zueinander kongruent sein müssen? Was wäre noch denkbar?

An dieser Stelle möchten wir noch einen anderen Weg einschlagen. Um Polyeder effizient zu transportieren, kann es sinnvoll sein, sie lückenlos in einem Lastwagen unterzubringen. Wie am ersten Tag wollen wir uns dabei zunächst nicht um die Begrenzung des Laderaumes kümmern. Dies führt zu einem dreidimensionalen Analogon zur Parkettierung der Ebene. Wir fragen also:

Problem 3

Mit welchen Polyedern lässt sich der Raum lückenlos ausfüllen?

Tag 4 und 5: Aperiodische Parkettierungen

Wir haben bereits gesehen, dass wir die Ebene auf viele verschiedene Weisen mit Fliesen parkettieren können. Viele dieser Parkettierungen haben immer wiederkehrende Muster. Mit solchen Eigenschaften wollen wir uns heute näher beschäftigen und letztendlich einen komplizierten Themenkomplex kennenlernen, nämlich den der *aperiodischen Parkettierungen* oder, um noch genauer zu sein, *Penrose-Parkettierungen*. Diese Parkettierungen wurden nach ihrem Entdecker Roger Penrose benannt, der diese im Jahr 1973 fand.

Betrachten wir zunächst die Parkettierung der Ebene mit Quadraten einer festen Größe wie auf einem Schachbrett. Wenn wir nun in Gedanken noch ein identisches Fliesenmuster auf unsere Parkettierung legen und dieses horizontal verschieben, so stellen wir fest, dass das verschobene Muster mit dem unterliegenden oft in deckungsgleicher Lage ist; nämlich dann, wenn wir das obenliegende Muster um ein Vielfaches der Quadratlänge verschoben haben. Wir wollen die Schachbrettparkettierung deshalb *horizontal-invariant* nennen. Natürlich können wir diese Parkettierung auch entlang einer Vertikalen verschieben, weshalb wir es auch *vertikal-invariant* nennen. Für andere Parkettierungen werden wir diese Begriffe analog verwenden.

Problem 1

Gibt es eine Parkettierung der Ebene, die nicht horizontal-invariant ist? Falls du so eine finden solltest, wie viele verschiedene Fliesenarten benötigst du?

Als nächstes wollen wir uns einmal folgendes Szenario vorstellen: Wir, sowohl Hersteller als auch Verleger von Fliesen, erhalten einen Auftrag. Es soll ein ziemlich großer, praktisch unendlich weiter Raumboden mit Quadraten gefliest werden. Die einzigen Rahmenbedingungen, die uns der Auftraggeber dabei nannte, waren, dass nur zwei verschiedene Arten von quadratischen Fliesen verwendet werden sollen und dass sich das Muster weder horizontal noch vertikal wiederhole, da dies sonst eintönig wirken würde. In der Größenwahl der Fliesen haben wir aber frei Hand.

Problem 2

Gibt es eine Parkettierung der Ebene mit zwei (oder zumindest endlich vielen) Arten von Fliesen, die weder horizontal- noch vertikal-invariant ist?

Wir können die Schachbrettparkettierung auch entlang einer anderen fixierten Geraden g im Raum verschieben. Falls wir dann erneut feststellen, dass das verschobene Muster mit dem unterliegenden deckungsgleich ist, so nennen wir die Schachbrettparkettierung g-invariant.

Problem 3

Ist die Schachbrettparkettierung für jede Gerade g im Raum g-invariant oder kannst du eine finden, für die sie es nicht ist?

Wir wollen nun eine Parkettierungen *periodisch* nennen, wenn es zwei Geraden g und f mit verschiedenen Steigungen in der Ebene gibt, für die sie sowohl g- als auch f-invariant ist. Eine Parkettierung, die sowohl horizontal- als auch vertikal-invariant ist, wäre also periodisch. Umgekehrt nennen wir eine Parkettierung *aperiodisch*, wenn wir keine zwei Geraden finden können, für die sie jeweils periodisch wäre.

Problem 4

Versuche einige aperiodische Parkettierungen der Ebene zu finden.

Als nächstes wollen wir uns mit einigen bestimmten aperiodischen Parkettierungen befassen, nämlich den Penrose-Parkettierungen. Dafür werden wir ab jetzt nur noch genau zwei verschiedene Fliesenarten verwenden, nämlich die in Abbildung 4 dargestellten Rhomben, deren Seitenlänge jeweils a ist:

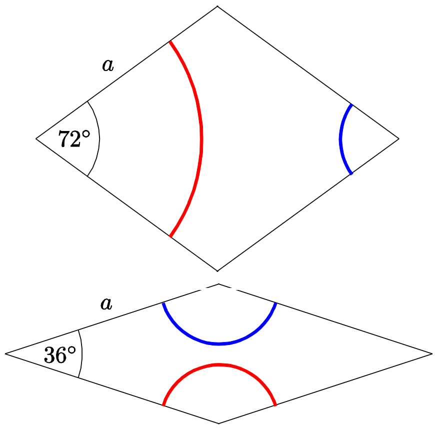

Abbildung 4: Penrose-Fliesen

Mit diesen Fliesen können wir die Ebene bereits aperiodisch parkettieren (wie?). Wir fügen nun aber eine zusätzliche Regel ein, die es beim Parkettieren einzuhalten gilt.

(*) Zwei Fliesen dürfen nur aneinandergelegt werden, wenn die beiden roten oder blauen Bögen über die anliegende Kante hinweg eine durchgängige, einfarbige Linie bilden (vergleiche Abbildung 4).

Um einzusehen, dass man auch unter Einhaltung dieser Regel die Ebene parkettieren kann, wollen wir uns zunächst einige andere hilfreiche Dinge überlegen. Zunächst sehen wir uns die Ecken der Fliesen an. Um das nächste Problem etwas kürzer formulieren zu können, führen wir einen neuen Begriff ein. Wenn wir sagen, dass wir die Ebene um einen Punkt P in ihr mit Fliesen *lokal parkettieren* können, dann meinen wir, dass wir einen Kreis mit P als Mittelpunkt und einem beliebig wählbaren, aber von 0 verschiedenen Radius mit unseren Fliesen lückenlos und ohne Überlappung der Fliesen überdecken.

Problem 5

Welche verschiedenen Möglichkeiten gibt es die Fliesen unter Einhaltung der Regel (*) so zusammenzulegen, dass es einen Punkt P in der Ebene gibt, der für jede beteiligte Fliese eine Ecke ist, und wir um P herum die Ebene zumindest *lokal* mit den beteiligten Fliesen parkettieren, sodass wir die Parkettierung unter Regel (*) weiter fortsetzen können?

Wir wollen nun zeigen, dass wir unsere Parkettierung „verfeinern" können. Dabei wollen wir einen bereits parkettierten Bereich mit neuen Fliesen unseres Typs überdecken, wobei die neuen Fliesen nun aber etwas kleiner sind. Wir überdecken dabei jede Fliese wie in Abbildung 5 dargestellt. Die roten Linien geben jeweils die Kanten der ursprünglichen Fliesen an.

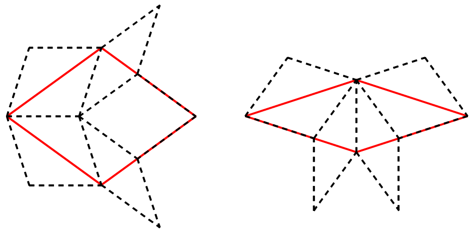

Abbildung 5: Penrose-Verfeinerungen

Problem 6

Können wir eine Parkettierung eines Teilbereichs der Ebene verfeinern, sodass die obige Regel (*) weiterhin gilt? Welche Muster entstehen an den Ecken von aneinander liegenden Fliesen? Und wie kann uns das bei der Parkettierung von größeren Bereichen der Ebene helfen?

Auf die gleiche Weise können wir eine Parkettierung eines hinreichend großen Bereichs der Ebene auch „vergröbern" und erhalten so eine neue Überdeckung des Bereichs.

Problem 7

Wie kann uns das „Vergröbern" unseres Parkettmusters helfen einzusehen, dass wir ein aperiodisches Muster erzeugen?

5 Lösungsskizzen für Lehrkräfte

5.1 Tag 1: Lösungsskizze

Problem 1

Möglich sind nur die folgenden regelmäßigen n-Ecke: Dreieck, Viereck, Sechseck. Nachdem die Schüler_Innen diese nun durch Ausprobieren gefunden haben, geht es darum zu beweisen, dass es keine anderen Parkettierungen durch eine Art regelmäßiges n-Eck gibt. Damit wir die ganze Ebene lückenfrei überdecken, müssen sich an einer Ecke die Innenwinkel der anliegenden n-Ecke zu 360° summieren. Da wir die Ebene mit nur einer Art von n-Eck parkettieren, muss demnach der Innenwinkel dieser ein Teiler von 360° sein. Ein regelmäßiges n-Eck (n>2) hat einen Innenwinkel von (n-2)·180°/n. Als Teiler von 360°, welche kleiner als 180° sind, bleiben nur 60°, 90° und 120°. Dementsprechend sieht man, dass nur n = 3, 4 und 6 Lösungen sein können.

An dieser Stelle soll auch die Innenwinkelformel von den Schüler_Innen bewiesen werden. Ein einfacher Beweis dafür wäre der folgende: n=3: Ein Dreieck hat die Innenwinkelsumme 180°. Da alle Winkel gleich groß sind, ist der Innenwinkel 60°. n>3: Zerlege das n-Eck in Dreiecke, die den Mittelpunkt und eine der Kanten des n-Ecks nutzen. Damit zerlegen wir also das n-Eck in n Dreiecke. Jedes Dreieck hat eine Innenwinkelsumme von 180°. Insgesamt haben wir also n·180°. Allerdings zählen wir dabei auch 360° am Mittelpunkt. Die Innenwinkelsumme des n-Ecks ist somit (n-2)·180°. Da alle Innenwinkel gleich groß sind, ist der Innenwinkel somit (n-2)·180°/n.

Es wurde nicht gesagt, dass an einer Ecke nur Ecken zusammentreffen. Es könnte auch (höchstens) eine Kante an einer Ecke anliegen. In diesem Fall muss die Innenwinkelsumme der anliegenden regulären n-Ecke 180° ergeben, das heißt, es sind entweder Dreiecke oder Quadrate und keine Sechsecke.

Problem 2

An einer Ecke müssen sich die Innenwinkel der anliegenden n-Ecke zu 360° summieren, damit wir die ganze Ebene lückenfrei und ohne Überlappung überdecken. Allerdings können wir jetzt mehr als eine Figur nutzen. Bestimmen wir zunächst mit Hilfe der Formel aus Problem 1 die Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks. Diese sind in Tabelle 1 angegeben.

Tabelle 1: Innenwinkel regulärer *n*-Ecke

Reguläres *n*-Eck	Innenwinkel
Dreieck	60°
Viereck	90°
Fünfeck	108°
Sechseck	120°
Achteck	135°
Zehneck	144°

Schauen wir uns jetzt zum Beispiel die Innenwinkel von Quadraten (90°) und regelmäßigen Achtecken (135°) an, so sehen wir, dass die Gleichung 360°= 2·135°+1·90 gilt.

Bei einer Parkettierung der Ebene mit Achtecken und Quadraten müssen sich an einer Ecke also ein Quadrat und zwei regelmäßige Achtecke treffen. Tatsächlich können wir auch eine solche finden, welche in Abbildung 6 angegeben ist.[7]

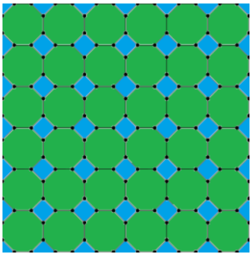

Abbildung 6: Parkettierung mit Quadraten und Achtecken.

Ebenso kann man zeigen, dass es zum Beispiel keine Parkettierung mit Quadraten und regelmäßigen Zehnecken (144°) gibt. Es gibt keine natürlichen Zahlen *a* und *b*, sodass 360°≠a·144°+b·90°.

Problem 3

Es sollte den Schüler_Innen auffallen, dass nun Dreiecke und Sechsecke abgeschnitten werden müssen, um einen solchen Raum zu parkettieren und Vierecke nur dann nicht, wenn die Seitenlänge ein Teiler von m ist. Es soll sie aber auch dazu anregen, sich selbst Folgeprobleme auszudenken. Zum Beispiel: Angenommen meine Fliesen sind beliebig biegbar und ich habe einen Raum mit den Abmessungen $m \times m \times m$, was muss gelten, damit ich alle Wände dieses Raums lückenlos Parkettieren kann.

5.2 Tag 2: Lösungsskizzen

Problem 1

Eine von Escher sehr ausgiebig genutzte Möglichkeit Symmetriezeichnungen zu erhalten ist es, diese aus einer einfachen Parkettierung zu konstruieren. Dazu nimmt man sich eine einfache Parkettierung der Ebene und schneidet beziehungsweise fügt nun passende Teile hinzu. Bei der Symmetriezeichnung 105 nimmt man sich eine quadratische Parkettierung der Ebene als Grundlage und verschiebt einzelne Fragmente des Quadrates von einer Seite auf die gegenüberliegende.

[7] Für weitere Beispiele siehe Wikipedia unter: https://de.wikipedia.org/wiki/Parkettierung

Problem 2

Es können auch unterschiedliche Parkettierungen verwendet werden, um Symmetriezeichnungen zu erhalten. Eventuell werden einige Schüler_Innen sogar auf die Metamorphose-Zeichnungen Eschers kommen. In diesen abstrahiert er etwas weiter und lässt die Fliesen in fließendem Übergang leicht variieren. Tatsächlich hat Escher sich vieler Methoden bedient. Eine genauere Klassifizierung ist mathematisch über die Gruppentheorie erreichbar. Gruppen sind spezielle algebraische Strukturen, die in einer gewissen Art und Weise Symmetrien auffangen können. Das Thematisieren von Gruppen wäre jedoch ein Projekt für sich und würde an dieser Stelle den Rahmen sprengen. Wir wollen nur darauf verweisen, dass auch die späteren Aufgaben eng mit Gruppen zusammenhängen und auch Parkettierungen gruppentheoretisch betrachtet werden können.

Problem 3

In einer solch freien Aufgabe gibt es natürlich keine richtigen oder falschen Antworten. Wir möchten nur in aller Kürze die Anregung geben, dass das Thema im Kunstunterricht aufgegriffen werden könnte. Hier konstruierte Muster sind ebenfalls schön darstellbare Ergebnisse der Projektwoche.

Problem 4

Es finden sich zum Beispiel bei den Usbeken oder generell im arabisch oder islamisch geprägten Raum viele Beispiele für besonders komplexe Fliesen. Hier könnte man zudem einen Exkurs in den Geschichts- bzw. Religionsunterricht vornehmen. An dieser Stelle bietet es sich ferner sehr gut an eine Verbindung mit dem Thema der Tage 4 und 5 herzustellen. Bereits lange vor Roger Penrose wurden prinzipiell nicht-periodische Parkettierungen angegeben. Die dabei verwendeten Fliesen nennen sich Girih-Fliesen (oder Girih-Kacheln).[8]

Tag 3: Lösungsskizzen

Problem 1

Zunächst wollen wir einige Hinweise zum Basteln geben: Es gibt spezielle Baukästen und ausdruckbare Bastelbögen, in denen die Flächen über kleine Klebefalze aneinandergeklebt werden. Wer den Ansatz verfolgen möchte die Körper aus Kanten zu basteln, kann auch hierfür Bausätze finden, oder dies kostenfrei über Strohhalme und Bindfäden erreichen. Nach einer angemessenen Zeit kann man in einer Zwischenbesprechung die gefundenen Körper vergleichen und den Kindern die Möglichkeit geben nicht gefundene Körper nachzubauen. Es gibt die folgenden platonischen Körper: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Pentagondodekaeder und Ikosaeder. Ferner gibt es 13 (oder je nach Zähl-

---

[8] (Lu und Steinhardt 2007)

weise 15) archimedische Körper, sowie unendlich viele Prismen und Antiprismen. Wir haben in unserem Aufgabenblatt nicht zwischen diesen drei Arten von Polyedern unterschieden, um den Schüler_Innen keine unnötigen Hinweise zu geben.

Man kann mit dem eulerschen Polyedersatz zeigen, dass die oben genannten alle platonischen Körper sind. Dies wäre ein interessantes Anschlussproblem, was wir jedoch an dieser Stelle nicht weiter ausführen wollen.

Problem 2

Es ist natürlich nicht vorherzusehen auf welche Verallgemeinerungen die Schüler_Innen kommen. Wenn wir die Bedingung der Konvexität fallen lassen, befinden wir uns bei den Kepler–Poinsot Körpern. Andere naheliegende Konzepte sind: die Johnson-Körper, catalanische Körper oder Deltaeder.

Problem 3

Besonders kanonische Raumfüllungen basieren auf den bereits bekannten Parkettierungen. Wenn wir jeder Fliese eine konstante Höhe *h* geben, können wir den Raum in „Scheiben" der Dicke *h* unterteilen und diese wie die Ebene auslegen. Wir haben es also mit Prismen zu tun. Andere Raumfüllungen zu finden ist sehr schwierig: Bilder und weitere Beispiele findet man zum Beispiel auf Wikipedia unter dem Stichwort „Raumfüllung".[9] Auch hier können wir keinen Vollständigkeitsbeweis von den Schüler_Innen erwarten.

5.3 Tag 4 und 5: Lösungsskizzen

Problem 1

Man benötigt bloß eine Fliesenart. Es gibt viele Parkettierungen dieser Art. Ein Beispiel für eine solche Parkettierung entsteht aus der gitterartigen beziehungsweise schachbrettartigen Parkettierung mit Quadraten, wenn man eine Spalte von Quadraten um ein nicht ganzzahliges Vielfaches der Seitenlänge der Quadrate vertikal verschiebt.

Problem 2

Auch für diese Frage gibt es viele verschiedene Lösungen. Wir wollen hier kurz einige ansprechen:

1. (Vorgreifend auf Problem 4): Die Lösungen aus Problem 4 sind selbstverständlich auch als Lösungen für dieses Problem geeignet und wahrscheinlich einfacher als die folgenden beiden.

---

[9] Siehe hierzu: https://de.wikipedia.org/wiki/Raumfüllung

2. (falls ein geometrischer Beweis des Satzes von Pythagoras im Unterricht angesprochen wurde): Es bietet sich an dieser Stelle eine Parkettierung der Ebene mit zwei Quadraten an, bei der eine geometrische Beweisidee des Satzes von Pythagoras aufgegriffen wird. Zunächst wählen wir eine pythagoreische Parkettierung der Ebene, wie in Abbildung 7 gezeigt.

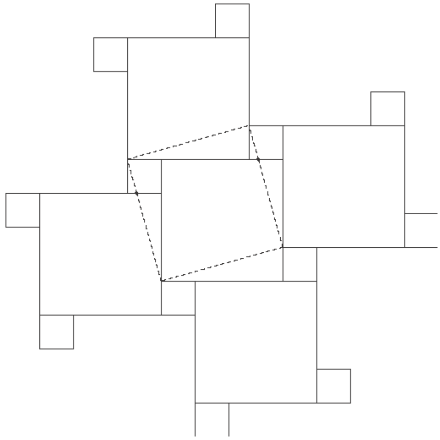
Abbildung 7: Pythagoreische Parkettierung

Wählen wir nun die beiden Seitenlängen der Kathetenquadrate so, dass sie in einem irrationalen Verhältnis zueinander stehen, erhalten wir eine Parkettierung der Ebene mit den gewünschten Eigenschaften. Wir führen die Argumentation dazu nun noch etwas genauer aus.

Zunächst folgt aus der Symmetrie der Parkettierung, dass es genügt zu zeigen, dass die Parkettierung nicht horizontal-invariant ist. Das Fehlen der vertikalen Invarianz ergibt sich daraus dann ebenfalls. Sagen wir, dass die Quadrate jeweils Seitenlänge *a* beziehungsweise *b* haben. Wir denken uns die Ebene nun eingebettet in ein Koordinatennetz, dessen Ursprung im Mittelpunkt eines beliebigen Quadrats mit Seitenlänge *a* liege. Aus der Symmetrie der pythagoreischen Parkettierung folgt, dass wir genau dann nicht horizontal-invariant sind, wenn sich kein weiteres Quadrat mit Mittelpunkt auf der *x*-Achse in unserem Koordinatennetz finden lässt. Wir charakterisieren nun, wann dies genau der Fall ist. Zunächst bemerken wir, dass die Mittelpunkte aller Quadrate der Seitenlänge *a* auf Geraden der Steigung a/b liegen. Außerdem sehen wir, dass es für jede ganze Zahl k eine Gerade gibt, die durch den Mittelpunkt eines Quadrates mit Seitenlänge a verläuft, dessen *y*-Koordinate $k \cdot b$ ist. Genauer gibt es für jedes ganzzahlige *k* eine Gerade $g_k(x) = a/b \cdot (x - ka) + kb$, sodass genau an den Punkten $(nb + ka, g_k(nb + ka))$ Mittelpunkte von Quadraten der Seitenlänge a liegen. Aus diesen Beobachtungen ergibt sich also: Die pythagoreische Parkettierung ist genau dann horizontal-invariant, wenn die Gleichung

$$a/b \cdot (nb + ka - ka) - kb = na - kb = 0$$

ganzzahlige Lösungen außer $n = k = 0$ hat. Eine äquivalente Form dieser Gleichung ist $n/k = b/a$, da wir 0 weder für *n* oder *k* zulassen noch für die Seitenlänge eines Quadrates. Daraus können wir nun direkt ablesen, dass die pythagoreische Parkettierung genau dann horizontal-invariant ist, wenn die Seitenlängen der parkettierenden Quadrate in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen.

3. (Vorgreifend auf Problem 3): Drehen wir die schachbrettartige Parkettierung der Ebene mit Quadraten gleicher Größe um einen Winkel, dessen Sinuswert irrational ist, so erhalten wir eine Parkettierung des gesuchten Typus. Die Argumentation ist sehr ähnlich zu der in Punkt 2, weshalb wir sie hier nicht aufführen.

Problem 3

Die Schachbrettparkettierung ist nicht für jede Gerade der Ebene invariant. Wählen wir zum Beispiel eine Gerade mit irrationaler Steigung, so ist die Parkettierung nicht invariant, wenn die Seitenlänge der Quadrate rational war. Die Begründung ist analog zu der von Problem 2 Punkt 2 beziehungsweise 3.

Problem 4

Es sind viele verschiedene aperiodische Parkettierungen denkbar. Eine Möglichkeit wäre mit einer Schachbrettparkettierung zu beginnen und dann bestimmte Quadrate erneut zu unterteilen, beispielsweise in vier Quadrate oder in zwei Dreiecke. Sofern auf Periodizität beim Unterteilen verzichtet wird, entsteht eine aperiodische Parkettierung. Ein Beispiel hierfür wäre das folgende: Wir betrachten eine Schachbrettparkettierung mit Quadraten der Seitenlänge 1 der Ebene, die wir mit einem Koordinatennetz versehen. Die Mittelpunkte der Quadrate sollen dabei genau auf den ganzzahligen Gitterkoordinaten liegen. Nun zeichnen wir zunächst in jedes Quadrat eine Diagonale, für deren Mittelpunkt die x-Koordinate eine positive oder negative Zweierpotenz ist. Als nächstes zeichnen wir auch in jedes Quadrat eine Diagonale, für deren Mittelpunkt die y-Koordinate eine positive oder negative Potenz von 3 ist, mit Ausnahme des bereits unterteilten Quadrats im Ursprung des Koordinatennetzes. Auf diese Weise ist sichergestellt, dass das Quadrat, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt, zu keinem anderen verschoben werden kann, sodass sich das Parkettierungsmuster dort auf die gleiche Weise fortsetzt.

Eine weitere aperiodische Parkettierung, welche bloß die Romben aus Abbildung 4 als einzige Fliesenart verwendet, ist in Abbildung 8 abgebildet.

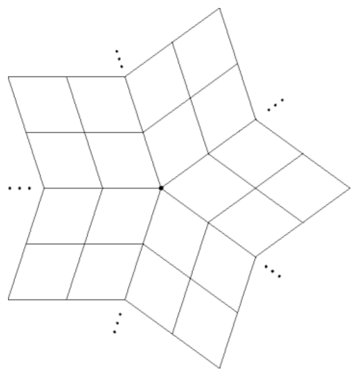

Abbildung 8: Aperiodische Sternparkettierung

Der Grund für die Aperiodizität ist, dass es nur einen Punkt in der Ebene gibt, an dem fünf Rauten aneinander anliegen.

Problem 5

Es gibt insgesamt acht verschiedene Möglichkeiten, welche in Abbildung 9 angegeben sind. Um auf all diese Möglichkeiten zu kommen, ist ein systematisches Vorgehen nötig. Wir skizzieren ein solches und nennen dafür die Rhomben mit einem 72º Innenwinkel hier *groß* und die mit einem 36º Innenwinkel *klein*. Zunächst bemerken wir, dass wir minimal fünf Rhomben, nämlich ausschließlich große, an einer gemeinsamen Ecke aneinanderlegen können, sodass wir die Ebene darum lokal parkettieren, und maximal 10, nämlich nur kleine Rhomben. Wie bei unseren grundlegenden Parkettierungsproblemen sind hier Betrachtungen der Innenwinkel essentiell: 360º = 5·72º = 10·36º. Insgesamt haben wir die Regel (*) dabei zunächst außer Acht gelassen. Wir gehen nun systematisch einige Möglichkeiten durch:

1. An einer Ecke liegen 5 große Rhomben an: In diesem Fall gibt es zwei Möglichkeiten, wie wir die Rhomben aneinanderlegen und (*) beachten, da sich entweder ein blauer oder ein roter Kreis bildet. Die beiden Möglichkeiten sind genau Typ 1 und Typ 2.

2. An einer Ecke liegen 4 große und 2 kleine Rhomben an: In diesem Fall gibt es nur eine Möglichkeit, nämlich Typ 3. Zunächst ist es einfach zu sehen, dass wir Regel (*) nicht einhalten können, wenn sich um die gemeinsame Ecke eine blaue Kurve durch die vier großen Rhomben bildet. Bildet sich die rote Kurve, so können wir nur auf eine Art lückenlos parkettieren. Hierbei könnten noch die beiden Fälle unterschieden werden, dass sich die beiden kleinen Rhomben entweder eine Kante teilen oder nicht. Der letztere Fall ist hier nicht möglich unter Einhaltung von Regel (*).

3. An einer Ecke liegen 3 große und 4 kleine Rhomben an: Nach dem Schubfachprinzip müssen sich in diesem Fall genau zwei große Rhomben eine Kante teilen. Zunächst wird hier die Möglichkeit ausgeschlossen, dass sich ein kleiner Rhombus Kanten mit zwei verschiedenen großen teilt. Nun erhalten wir wie oben, dass die großen Rhomben um die gemeinsame Ecke rote Kurven erzeugen müssen, womit sich Typ 4 eindeutig ergibt.

4. An einer Ecke liegen 2 große und 6 kleine Rhomben an: In diesem Fall würden zwei kleine Rhomben existieren, die sich eine Kante teilen und über die sich eine rote Kurve bildet. Diese kann dann allerdings nicht durch das Anlegen einer weiteren Fliese weiter fortgesetzt werden. Wir erhalten somit zwar lokal die Regel (*), doch können wir die Parkettierung nicht weiter fortsetzen.

5. An einer Ecke liegen 1 großer und 8 kleine Rhomben an: Analog zu Punkt 4.

6. An einer Ecke liegen 0 große und 10 kleine Rhomben an: Analog zu Punkt 4.

Die bisherigen Fälle waren alle von der Gestalt, dass jede Fliese ihren kleinen Innenwinkel um die gemeinsame Ecke herum hatte. Für die nächsten Fälle versuchen wir den 144º Winkel eines kleinen Rhombus um die gemeinsame Ecke herum zu platzieren.

7. An einer Ecke liegt ein kleiner Rhombus an, dessen blaue Kurve zur Ecke hin gekrümmt ist: Die blaue Kurve muss sich in diesem Fall zu einem Kreis schließen, was nur mit Typ 6 und 8 möglich ist.

8. An einer Ecke liegt ein kleiner Rhombus an, dessen rote Kurve zur Ecke hin gekrümmt ist: Würden zwei kleine Rhomben auf diese Weise um die gemeinsame Ecke herum gelegt, könnte die rote Kurve nicht durch das weitere Anlegen einer Fliese fortgesetzt werden. Es ergibt sich somit durch Regel (*) eindeutig Typ 7.

Die beiden Betrachtungen 7 und 8 haben alle Möglichkeiten beleuchtet, bei denen ein 144º Innenwinkel eines kleinen Rhombus um die gemeinsame Ecke anliegt. Wir schließen die Fallunterscheidungen damit ab, dass wir alle Möglichkeiten untersuchen, bei denen mindestens ein 108º Innenwinkel eines großen Rhombus um die gemeinsame Ecke anliegt. In diesem Fall kann die rote Kurve an der gemeinsamen Ecke einerseits mit einem kleinen Rhombus fortgesetzt werden, was dann zwangsläufig wegen Regel (*) in Typ 7 resultiert.

Andererseits könnte ein weiterer großer Rhombus genutzt werden, um die rote Kurve an der gemeinsamen Ecke fortzusetzen. Betrachten wir nun die blauen Kurven dieser Rhomben. Würden wir, um diese fortzusetzen, einen großen Rhombus an die gemeinsame Ecke anlegen, so verblieben nur noch 360º-3·108º = 36º an der gemeinsamen Ecke, die wir mit einem kleinen Rhombus füllen müssten. Dies ist allerdings nicht möglich ohne dabei die Regel (*) zu verletzen. Betrachten wir also die Möglichkeit, dass beide blauen Linien der großen Rhomben jeweils durch kleine fortgesetzt werden. Die einzige Möglichkeit die Parkettierung zu vervollständigen und Regel (*) zu wahren, ist nun Typ 5.

Da es für die beiden folgenden Probleme hilfreich ist, auf die verschiedenen Möglichkeiten zu referenzieren, bezeichnen wir sie mit Typ 1 bis hin zu Typ 8, welche in Abbildung 9 dargestellt sind.

Problem 6

Jeder Punkt der Ebene, um den wir die Ebene lokal mit unseren ursprünglichen Fliesen parkettieren und der eine Ecke für jede beteiligte Fliese ist, wird die gleiche Eigenschaft auch für die verfeinerte Parkettierung haben. Die jeweiligen Typen der Ecken verändern sich dabei allerdings. Wir haben dies in der folgenden Tabelle 2 zusammengefasst:

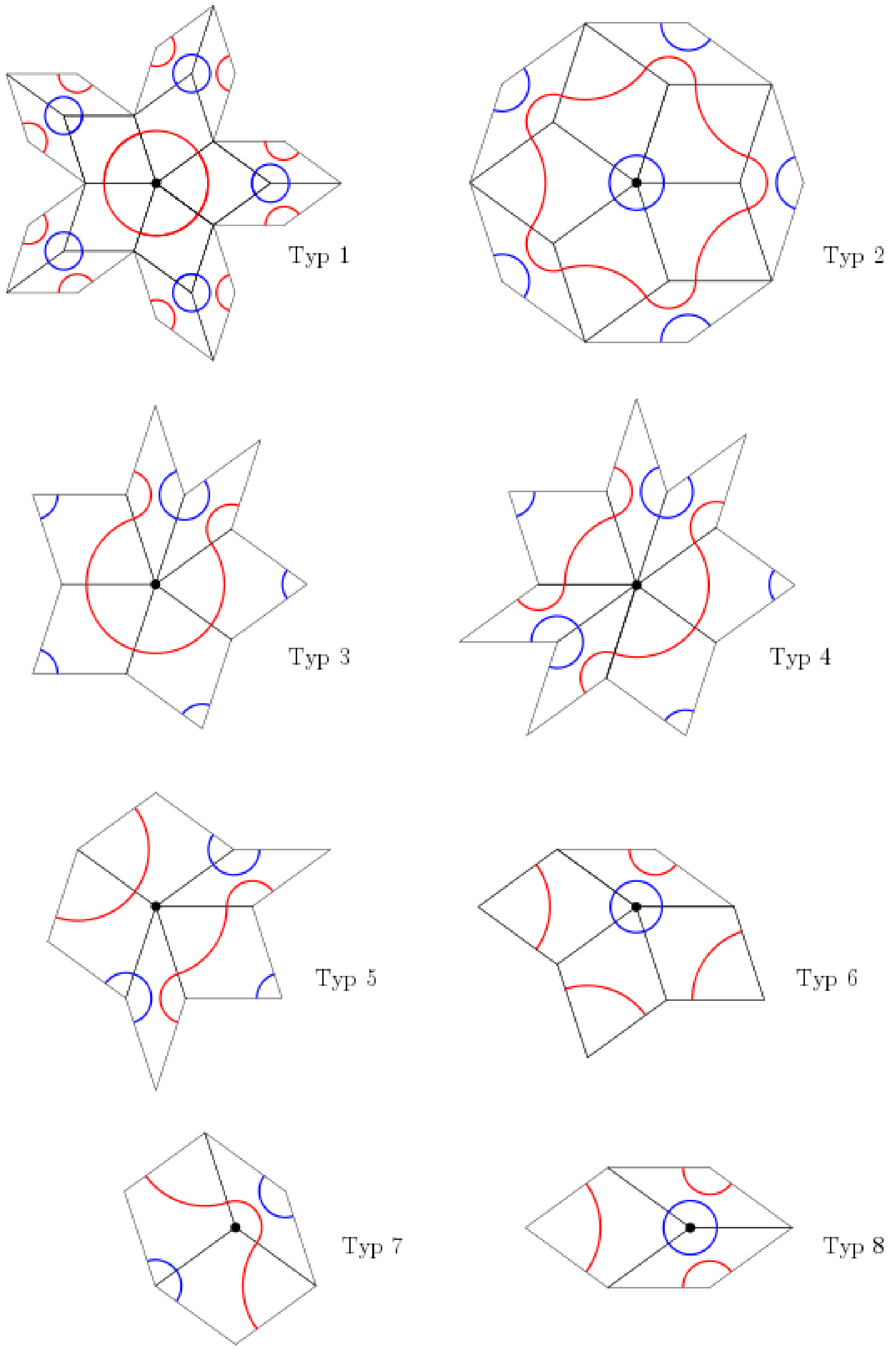

Abbildung 9: Penrose-Parkettierung um Ecken.

Tabelle 2: Änderungen des Typs der Penrose-Parkettierung bei Verfeinerungen

Ursprüngliche Parkettierung	Verfeinerte Parkettierung
Typ 1	Typ 2
Typ 2	Typ 1
Typ 3	Typ 2
Typ 4	Typ 2
Typ 5	Typ 6
Typ 6	Typ 3
Typ 7	Typ 8
Typ 8	Typ 4

Dies hilft uns einzusehen, dass wir tatsächlich beliebig große Bereiche der Ebene mit den beiden Rhomben als Fliesenarten unter Berücksichtigung der Regel (*) parkettieren können. Man könnte das Verfahren dafür wie folgt beschreiben:

Wir beginnen zunächst damit die Ebene um einen Punkt P herum lokal zu parkettieren. Wir haben bereits eingesehen, dass dies auf acht verschiedene Weisen möglich ist. Welche wir wählen, ist egal. Jede beteiligte Fliese verfeinern wir nun auf die angegebene Weise, wodurch wir einen etwas größeren Bereich der Ebene überdecken als zuvor. Dabei sind die resultierenden Fliesen aber kleiner geworden. Wir strecken nun das entstandene Muster und jede beteiligte Fliese, wobei wir P als Zentrum der Streckung fixieren. Wir führen die Streckung so aus, dass jeder der Rhomben danach erneut die Seitenlänge a hat. Tatsächlich überdecken wir nach der Streckung mit der neuen Parkettierung einen echt größeren Kreis mit P als Mittelpunkt als wir es zuvor maximal konnten. Durch das Iterieren dieses Verfahrens können wir schließlich jede beliebig groß gewählte Kreisscheibe in der Ebene lückenlos mit unseren Fliesen überdecken.

Bemerkung: Damit ist noch nicht gezeigt, dass wir die gesamte, unendlich weite Ebene parkettieren können. Das Problem dabei ist, dass wir die Verfeinerung unendlich lang iterieren müssten, um die gesamte Ebene zu parkettieren. Dies genau zu definieren ist allerdings problematisch. Augenscheinlich ist dann auch nicht klar, welcher Eckentyp am Punkt P letztendlich vorliegt, da diese beim Verfeinern ja stets wechseln. Tatsächlich genügt die Antwort zu Problem 5 aber aus, um damit zu zeigen, dass tatsächlich die gesamte Ebene parkettiert werden kann. Die mathematische Beweistechnik, welche die fehlende Lücke schließen kann, nennt sich das *Kompaktheitsprinzip*. In diesem Fall würde auch eine etwas schwächere Variante genügen, die sich Königs Unendlichkeitslemma nennt. Diese Prinzipien nutzen dabei, dass wir für jede Kreisscheibe mit endlichem Radius und P als Mittelpunkt nur endlich viele Möglichkeiten haben die Ebene lokal um P herum zu parkettieren, sodass P eine Ecke jeder Fliese ist, auf der P liegt.

Genauer gehen wir auf dieses Problem hier nicht ein. Diese Problematik vor Schüler_innen anzusprechen ist sicherlich ambitioniert, aber eben gerade deswegen nicht unbedingt verkehrt. Den Beweis für die Parkettierung der gesamten Ebene tatsächlich mit den Schüler_Innen zu besprechen, wäre sicherlich unpassend für jegliches Schulniveau, doch das Erkennen der Problematik ist bereits eine schwierige und zugleich wertvolle Erkenntnis.

Problem 7

Angenommen die ursprüngliche Parkettierung wäre periodisch, so wäre auch die Parkettierung periodisch, die durch das angegebene Vergröbern der Parkettierung entsteht. Hätten wir also zwei Punkte P und Q in der Ebene, sodass wir unsere ursprüngliche Parkettierung vom Punkt P zum Punkt Q hin verschieben könnten und eine deckungsgleiche Parkettierung erhielten, so müsste dies auch für die Parkettierung gelten, die durch das Vergröbern entsteht. Da sich der Flächeninhalt der jeweiligen Rhomben beim Übergang von der ursprünglichen Parkettierung zur vergröberten aber mehr als verdoppelt, werden die verwendeten Rhomben beliebig groß, wenn wir die Parkettierungen nur oft genug vergröbern. Die Art und Weise wie vergröbert wird, sichert uns dann, dass schließlich je zwei beliebig gewählte Punkte der Ebene auf einer gemeinsamen Raute liegen für eine hinreichend oft vergröberte Parkettierung. Betrachten wir nun aber erneut zwei Punkte P und Q mit den oben angegebenen Eigenschaften, so erhalten wir einen Widerspruch, da die Fliese, die in einer hinreichend groben Parkettierung sowohl P als auch Q enthält, beim Verschieben der gesamten Parkettierung von P nach Q auf keine andere Fliese verschoben würde.

6 Folgeprobleme, aktuelle Forschung und Querverbindungen zu anderen Disziplinen

Das Buch „Tilings and Patterns“ von B. Grünbaum und G. C. Shephard liefert einen sehr guten Einblick in die Thematik der Parkettierungen im Allgemeinen. Die Penrose-Parkettierungen werden dabei besonders intensiv besprochen.[10] Die Internetseite www.scienceu.com bietet einen sehr gut strukturierten Überblick zu Parkettierungen, insbesondere zu Penrose-Parkettierungen und deren Eigenschaften.[11] Um Penrose-Parkettierungen zu visualisieren, können Sie verschiedene Online Tools nutzen.[12]

---

[10] (Grünbaum und Shephard 1987)
[11] Siehe: http://www.scienceu.com/geometry/articles/tiling/penrose/
[12] Beispielsweise auf der folgenden Homepage: http://www.spacegoo.com/penrose/

Konstruierbare *n*-Ecke: Zur Lösung der Frage mit welchen regelmäßigen *n*-Ecken wir die Ebene auslegen können, mussten wir uns Gedanken über Innenwinkel machen. Hier stellt sich schnell die Frage, welche *n*-Ecke überhaupt *konstruierbar* sind. Also nur mit Zirkel und Lineal (ohne Abmessung von Längen) gezeichnet werden können. Eine vollständige Klassifikation geht über den Schulstoff hinaus. Die Halbierung des Winkels und damit die Konstruktion regelmäßiger $2^k \cdot 3$, $2^k \cdot 4$ und $2^k \cdot 5$-Ecke ist jedoch durchaus auch für Schüler_Innen erreichbar.[13]

Parkettierung des Kreises: Eine mögliche Parkettierung des Kreises kennen wir alle, wenn wir eine Pizza in gleichgroße Stücke aufteilen. Tatsächlich gibt es noch weitere Möglichkeiten. Erst jüngst wurde ein ganz neuer Typ von Parkettierungen der Kreisscheibe gefunden.[14] Uns kann auffallen, dass bei allen bekannten Kreisparkettierungen der Mittelpunkt nicht innerhalb einer Fliese liegt. Muss dies immer so sein? Dies ist eine ungelöste Fragestellung (Stand März 2017).

Kugelpackungen: Wir können die Ebene nicht mit Kreisen auslegen, die sinnvollere Frage ist damit: Wie viel der Ebene können wir auslegen. Im Zweidimensionalen hängt dies eng mit Parkettierungen durch *n*-Ecke zusammen. Man denke an In- und Umkreise. Die Fragestellung ist für den Raum besonders interessant: Für den Fall n = 3, also für die Kugel, kennt jeder Obsthändler eine Lösung: Die Kugeln werden in Schichten gestapelt, sodass jede Schicht in den Holräumen vorangehender Schichten liegt.[15] Die Optimalität dieser Anordnung

---

[13] Gauß bewies in seinen *Disquisitiones Arithmeticae*, dass ein reguläres 17-Eck konstruiert werden kann. Eine erste explizite Konstruktion wurde erst 1825 von Johannes Erchinger angegeben. Die notwendige Bedingung zur Konstruierbarkeit (i.e. das *n* das Produkt von einer Zweierpotenz und Fermatschen Primzahlen ist) wurde ebenfalls von Gauß entdeckt. Dass diese Bedingung auch hinreichend ist, zeigte Pierre Wantzel 1837. Das erste explizite Konstruktionsverfahren für ein reguläres 257-Eck wurde von Friedrich Julius Richelot (1832) angegeben. Ein besonderes Schmankerl ist das regelmäßige 65537-Eck. Zu beweisen, dass dieses konstruierbar ist, bedeutet noch nicht eine Konstruktionsvorschrift zu kennen. Die genaue Konstruktionsvorschrift zu finden, ist jedoch kein triviales Anliegen. Im Jahr 1984 reichte Johann Gustav Hermes nach über zehnjähriger Arbeit eine solche Vorschrift auf über 200 Seiten der Universität Göttingen vor. Das Manuskript befindet sich noch heute in der Bibliothek der Georg-August-Universität Göttingen. Passend zu diesem Fleißakt soll er das Ende seiner Antrittsrede als Direktor am Realgymnasium Osnabrück mit den Worten „Geduld ist die Pforte der Freude“ beendet haben.

[14] Siehe hierzu (Haddley and Worsley, unpublished). Dort findet sich bereits auf Seite 1:

> „Can we construct monohedral tilings of the disk such that a neighbourhood of the origin has trivial intersection with at least one tile?“

[15] Für eine populärwissenschaftliche Einführung konsultiere man beispielsweise (Szpiro 2003). Der Beweis von Hales findet sich in (Hales 2005). Jüngere Erfolge beinhaltet vor

vermutete bereits Kepler. Der Beweis erforderte jedoch massiven Computereinsatz und wurde erst in den siebziger Jahren des 20. Jahrhunderts erbracht.

Quasikristalle: Aperiodische Parkettierungen mit Eigenschaften, die wir von Penrose-Parkettierungen kennengelernt haben, kommen auch in unserer Umwelt und sogar in der Natur vor. Als Beispiel dafür möchten wir an dieser Stelle die sogenannte *Quasikristalle* erwähnen. Anders als bei Kristallen, bei denen Atome beziehungsweise Moleküle so im Raum angeordnet sind, dass sich ein periodisches Muster in ihrer Verteilung abzeichnet, sind die Atome beziehungsweise Moleküle von Quasikristallen aperiodisch angeordnet. Auch wenn es hier um räumliche Anordnungen geht, ist das Prinzip das gleiche wie bei den behandelten aperiodischen Parkettierungen. Mehr noch: Es zeigte sich, dass das aperiodische Muster Eigenschaften wie die angegebenen Penrose-Parkettierungen hat. In einem Quasikristall, der groß genug ist, werden wir jeden beliebig großen Ausschnitt der Atom- beziehungsweise Molekülverteilung des Quasikristalls häufig und an verschiedenen Stellen im gesamten Quasikristall wiederfinden. Es wird uns aber nicht gelingen zwei Punkte in der Verteilung zu finden, von denen aus gesehen die gesamten entsprechenden Verteilungen deckungsgleich sind.

Die Quasikristalle wurden von Dan Shechtman entdeckt, der seine Entdeckung im Jahr 1984 publizierte.[16] Aufgrund dieser Entdeckung verlieh man ihm dann im Jahr 2011 den Nobelpreis für Chemie. In der Natur hat man bislang nur wenig quasikristalline Strukturen entdeckt. Auf der Tschuktschen-Halbinsel in Russland fand man allerdings ein natürliches quasikristallines Mineral, das man Ikosaedrit nennt.[17] Es ist eine Legierung aus Aluminium, Kupfer und Eisen mit der Summenformel $A_{63}Cu_{24}Fe_{13}$. Für Materialwissenschaftler ergeben sich durch Quasikristalle, ob natürlich oder synthetisch, neue Möglichkeiten und Anwendungen. Abschließend möchten wir hier noch das Buch „Quasicrystals and Geometry“ von Marjorie Senechal als Referenz nennen, welches eine gute Einführung in aperiodische Parkettierungen liefert und deren Relevanz für Quasikristalle behandelt.[18]

Einstein-Problem: Das folgende offene Problem der Forschung ist nur noch bedingt als solches zu bezeichnen. Es zeigt allerdings auf mustergültige Weise die zuvor bereits erwähnte Genese von neuen Fragestellungen und Problemen.

---

allem den aufsehenerregenden Beweis, für *n*=8, siehe hierzu (Viazovska, forthcomming).

[16] (Shechtman et al. 1984)

[17] (Bindi et al. 2009)

[18] (Senechal, 1995)

Die von uns behandelte Parkettierung nach Roger Penrose hat die Eigenschaft, dass wir die Ebene auf eine Weise parkettieren, die nicht periodisch ist. Für die entsprechende Parkettierung haben wir bloß zwei Arten von Fliesen verwendet, wobei wir uns beim Parkettieren an eine zusätzliche Regel gehalten haben. Durch leichte Modifikationen an den Fliesen, beispielsweise dem Anheften und Herausschneiden von kleinen Falzen an jeder Fliese, können wir auf die zusätzliche Regel verzichten. Die Regel für das Zusammenlegen von Fliesen wird dann zwangsläufig durch die Form und die Anordnung der Falze beziehungsweise der Einkerbungen erzwungen. Es stellt sich heraus, dass diese nun leicht modifizierten Fliesen nur noch auf aperiodische Weise die Ebene parkettieren. Bei den ursprünglichen Rhomben war es jeweils noch möglich eine, dem Schachbrettmuster ähnliche Parkettierung der Ebene anzugeben, die periodisch ist und sogar nur eine der beiden Fliesenarten verwendet.

Daran anschließend stellt sich nun die Frage, ob diese Eigenschaft auch nur mit einem Fliesentypus erreicht werden kann. Genauer gesagt handelt es sich hierbei um das sogenannte

Einstein-Problem

Existiert eine Fliesenart, mit der man die Ebene ausschließlich auf aperiodische Weise parkettieren kann?

Auch im englischsprachigen Raum wird dieses Problem oft unter dem Namen Einstein-Problem geführt. Die Bezeichnung des Problems leitet sich hierbei direkt aus seiner deutschen Formulierung ab und bezieht sich nicht etwa auf eine Person wie zum Beispiel Albert Einstein.

Es erschien bereits eine Antwort auf diese Frage. Sie ist allerdings in gewisser Weise nicht vollends zufriedenstellend. Joshua E. S. Socolar und Joan M. Taylor gaben zwei Konstruktionen für eine solche Fliesenart an, die jeweils grob eine hexagonale Form haben und das Einstein-Problem positiv beantworten.[19] Der kontroverse Punkt ist allerdings, dass, je nachdem wie die Fliese genau konstruiert wird, entweder die Fliese nicht mehr nur aus einem zusammenhängenden Teil besteht oder sie eine zusätzliche Regel für das Parkettieren benötigt, die nicht allein durch die Form der Fliese erzwungen wird. Außerdem werden auch gespiegelte Versionen der Fliese für die Parkettierung verwendet, anstatt wie bisher nur gedrehte. Auf diese Weise haben sich direkt neue ungelöste Anschlussprobleme ergeben, die als Präzisierung oder Verschärfung aus der Fragestellung des Einstein-Problems hervorgehen.

[19] Siehe (Socolar und Taylor 2011)

7 Literatur

Bindi, L.; Steinhardt, P. J.; Yao, N. & Lu, P. J. (2009): Natural Quasicrystals. In: Science 324 (5932), S. 1306 – 1309

Gauss, C. F. (1801): Disquisitiones Arithmeticae. Leipzig

Grünbaum, B. & Shephard, G. C. (1987): Tilings and Patterns. W.H.Freeman & Co.

Haddley, J. & Worsley, S. (unpublished): Infinite families of monohedral disk tilings. In: arXiv preprint arXiv:1512.03794.

Lu, P. & Steinhardt, P.: Decagonal and Quasi-crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture. In: *Science*. Vol. 315, S. 1106–1110.

Mann, C.; McLoud-Mann J. & Von Derau D. (unpublished): Convex pentagons that admit i-block transitive tilings. In: arXiv preprint arXiv: 1510.01186.

Nestke, A. (2009): Die grössten Rätsel der Mathematik. Heidelberg: Spektrum-der-Wiss.-Verl.-Ges (Spektrum der Wissenschaft / Dossier, 2009, 6).

Ribenboim, P. (2005, c1999): Fermat's last theorem for amateurs. New York: Springer.

Rice, M. (2003): Escher-like patterns from pentagonal tilings. In: Schattschneider, D. & Emmer, M. (Hrsg.): M.C. Escher’s Legacy: A Centennial Celebration

Schattschneider, D. (1978): Tiling the Plane with Congruent Pentagons, *Mathematics Magazine*, Vol. 51 (1), S. 29-44

Senechal, M. (1995). Quasicrystals and Geometry. Cambridge University Press.

Shechtman D., Blech I., Gratias D. & Cahn, J. W. (1984): Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. In: *Physical Review Letters*. Vol 53, S. 1951–1953.

Singh, S. (2015): Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. 18. Aufl. München: Dt. Taschenbuch-Verlag

Socolar, J. E. S. & Taylor, J. M. (2011): An aperiodic hexagonal tile. In: *Journal of Combinatorial Theory*, Series A 118, S. 2207 – 2231

Szpiro, G. (2003): Kepler's conjecture. How some of the greatest minds in history helped solve one of the oldest math problems in the world. New York: John Wiley.

Taylor, R. & Wiles, A. (1995): Ring-Theoretic Properties of Certain Hecke Algebras. In: *The Annals of Mathematics* 141 (3), S. 553.

Viazovska, M. S. (forthcoming): The sphere packing problem in dimension 8. To Appear in: *Annals of Mathematics.*

Wiles, A. (1995): Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem. In: *The Annals of Mathematics* 141 (3), S. 443.

8 Appendix: Übersicht zu Fördermöglichkeiten von mathematisch begabten Schülerinnen.

Die folgende Liste ist insbesondere auf Hamburg zugeschnitten und beansprucht keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Gute Übersichten finden sich auch in den Portalen des Landesinstitutes für Lehrerbildung und Schulentwicklung.[20] Ferner seien auf die Übersichtsseiten von Bildung und Begabung und des Bundesministeriums für Bildung und Forschung verwiesen.[21]

Langfristige Fördermaßnamen

- PriMa
- William Stern Gesellschaft
- Juniorstudium UHH
- Frühstudium TUHH
- Schülerzirkel Mathematik
- Wurzel e.V.
- Mensa e.V.
- Deutsche Gesellschaft für das hochbegabte Kind

Schülerstipendien (meist inklusive Bedürftigkeit / Migrationshintergrund/ Fluchterfahrung als Aufnahmekriterium)

- Gripps gewinnt
- START
- Frauendorfer Förderstiftung
- Roland-Berger-Stiftung (in Hamburg nur eingeschränkt tätig)

Akademien

- Deutsche Schüler Akademie
- Deutsche Nachhaltigkeits Akademie
- Junior Akademie
- VorbilderAkademie
- TalentAkademie
- Frauenhofer Talentschools

Wettbewerbe

- Mathematik Olympiade
- Bundeswettbewerb Mathematik
- Tag der Mathematik
- Internationaler Städtewettbewerb Mathematik
- Känguru der Mathematik

[20] Siehe http://li.hamburg.de oder www.bildungsserver.de (Deutschlandweit).

- Jugend Forscht
- Schüler Experimentieren
- Informatik Bieber
- Informatik / Physik / Biologie – Olympiade
- Daniel Düsentrieb Wettbewerb
- Natex
- Bundeswettbewerb Physik
- …

Webseiten zum Stöbern

- http://www.arndt-bruenner.de/
- http://www.mathematische-basteleien.de/
- http://mathoid.de/
- …

Interessante YouTube Channel (meist Englischsprachig)

- Numberphile: https://www.youtube.com/user/numberphile
- Computerphile: https://www.youtube.com/user/Computerphile
- standupmath: https://www.youtube.com/user/standupmaths
- PBS infinite series: https://www.youtube.com/channel/UCs4aHmggTfFrpkPcWSaBN9g
- …

Bücher zum Stöbern

Aigner, M & Ziegler, G. M.: *Proofs from THE BOOK*. Springer-Verlag: Berlin; Heidelberg; New York 1998

Blum, W. (Hrsg.): ISTRON-Schriftenreihe *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*. Verlag Franzbecker: Bad Salzdetfurth; Hildesheim 1994 ff

[21] www.bmbf.de/de/ueber-die-schule-hinaus-jugendwettbewerbe-bieten-mehr-885.html